

## Gwyddor Rocedi heb y Cemeg

### Cyflwyniad

Mae'n eithaf rhyfeddol i ba raddau gall rhywun ddadansoddi mudiant roced gydag ychydig o ffiseg, ychydig o fathemateg a thaenlen.

Mae system roced syml sy'n troi poteli plastig yn rocedi'n eithaf rhad i'w phrynu. Un enghraifft dda yw'r aquapod®. Mae'r system yn y ffotograff yn seiliedig ar hwn. Potel blastig ydyw dan wasgedd, sydd wyneb i waered ac sydd wedi'i llenwi'n hanner llawn dŵr. Pan gaiff ei rhyddhau, caiff dŵr ei fwrw allan ar fuanedd uchel o'i gwaelod gan achosi i'r roced gyflymu tuag i fyny. Am fod momentwm tuag i lawr yn cael ei roi i'r dŵr, mae'r roced yn ennill momentwm tuag i fyny. Yn gynnar yn yr ymchwiliadau i'r rocedi hyn, darganfuwyd bod pêl wedi'i gosod ar ben y botel yn llawer haws ymchwilio iddi a'i modelu.



Diagram 1

### Dadansoddi Egni gan Ystyried Disgyrchiant

Y dadansoddiad symlaf sy'n bosibl ei wneud i'r roced yw defnyddio cadwraeth egni. Gallen ni wneud brasamcan bod y gwaith sy'n cael ei wneud i gywasgu'r nwy yn y pen draw'n troi'n egni potensial disgyrchiant y bêl. Faint o egni mae'r nwy cywasgedig yn ei storio? Er mwyn ateb hyn, mae angen i ni ddefnyddio ychydig o Fathemateg Safon Uwch i gyfrifo'r arwynebedd o dan gywasgiad isothermol mewn diagram  $p$ - $V$ . Dyma ganlyniad yr integru (does dim angen ei ddysgu).

$$W = p \times V \times \ln\left(\frac{p}{p_{\text{atm}}}\right)$$

### Hafaliad 1

Ile  $p$  yw'r gwasgedd uchel yn y botel,  $V$  yw cyfaint yr aer cywasgedig yn y botel a  $p_{\text{atm}}$  yw gwasgedd yr atmosffer.

Felly, mae potel 2 litr sydd wedi'i llenwi'n hanner llawn dŵr ac sydd â gwasgedd o  $4.4 \times 10^5 \text{ Pa}$  ynddi'n gallu cyflenwi tua 650 J o egni. Pe bai'r egni hwn i gyd yn cael ei drosglwyddo i bêl 0.45 kg, dylai'r bêl gyrraedd uchder o tua 150 m. Yn ymarferol, fodd bynnag, dim ond ffracsiwn bach o'r egni hwn sy'n cael ei drosglwyddo i'r bêl.

Cafodd yr arbrawf hwn ei gynnal gyda set o boteli plastig â'u cyfeintiau'n amrywio o 500 ml i 3.0 litr. Roedd pob potel yn hanner llawn dŵr i ddechrau a chafodd pob potel ei phwmpio at wasgedd o  $4.4 \times 10^5 \text{ Pa}$  (o wasgedd atmosfferig cychwynnol o  $1.0 \times 10^5 \text{ Pa}$ ). Mae'r graff (diagram 2) yn dangos y canlyniadau.

uchder/m

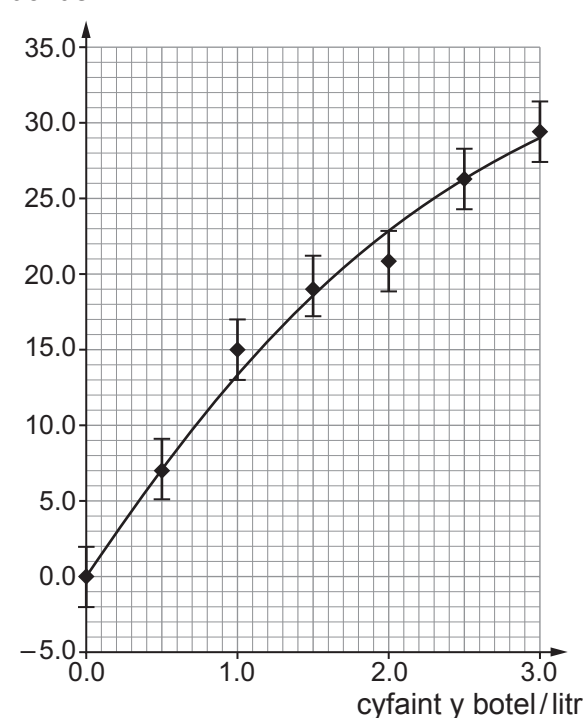


Diagram 2

Nid yw'n syndod efallai, nad yw'r ddadl cadwraeth egni syml hon wedi bod yn llwyddiant, ac nad yw'r berthynas rhwng uchder mwyaf y roced a chyfaint y botel mewn cyfrannedd union, fel yr oedd cadwraeth egni'n ei ragfynegi. 6

### Damcaniaeth Roced Ddelfrydol (buanedd gwacáu (*exhaust*) sefydlog a gan anwybyddu disgrychiant)

Nawr, rydym ni angen dadansoddi hyn ychydig yn fanylach. Mae angen i ni edrych ar beth sy'n achosi cyflymiad y roced. Mewn gwirionedd, mae angen i ni ddefnyddio ail ddeddf Newton ar gyfer y roced. Er mwyn gwneud hynny mae angen i ni wybod cyfradd newid momentwm y dŵr yn gadael y botel. Yn gyntaf, mae angen i ni ddiffinio rhai termau: 7

$m_0$  = cyfanswm màs cychwynnol y roced;

$t$  = amser wedi'i gyfrif o adeg lansio'r roced;

$\frac{\Delta m}{\Delta t}$  = cyfradd gyson bwrw màs allan; 8

$u$  = buanedd cyson y dŵr yn gadael y botel (yn gymharol i'r roced).

Mae'r grym cydeffaith sy'n cael ei roi ar y dŵr yn hafal i'w gyfradd newid momentwm. Y momentwm mae'r dŵr yn ei ennill bob eiliad yw  $u \frac{\Delta m}{\Delta t}$  (cofiwch,  $\frac{\Delta m}{\Delta t}$  yw'r màs sy'n gadael y botel bob eiliad). Hwn, felly, yw'r grym mae'r dŵr yn ei brofi ac yn ôl 3eddf ddeddf Newton, hwn yw'r grym mae'r roced yn ei brofi hefyd. Felly, rydym ni nawr yn gwybod mai'r grym gwthio sy'n gweithredu ar y roced yw  $u \frac{\Delta m}{\Delta t}$ . 9

Mae màs y roced yn lleihau ar gyfradd gyson o  $\frac{\Delta m}{\Delta t}$  felly ei màs ar unrhyw amser  $t$  yw  $(m_0 - \frac{\Delta m}{\Delta t} t)$ . 10

Mae hyn yn ddigon o wybodaeth i ddefnyddio 2<sup>il</sup> ddeddf Newton ( $F = ma$ ) i roi hafaliad ar gyfer y cyflymiad. Mae mathemateg (dim angen ei ddysgu) yna'n arwain at ddatrysiadau ar gyfer cyflymder ac uchder. Dyma'r hafaliadau: 11

$$v = -u \ln(1 - \alpha t)$$

**Hafaliad 2**

$$h = \frac{u}{\alpha} [(1 - \alpha t) \ln(1 - \alpha t) + \alpha t]$$

**Hafaliad 3**

$\alpha$  yw cymhareb cyfradd colli màs i'r màs cychwynnol,  $\left( \alpha = \frac{\frac{\Delta m}{\Delta t}}{m_0} \right)$ .

Nawr, gallwn ni geisio defnyddio'r hafaliadau hyn ar gyfer potel 2 litr nodweddiadol. Mae cyfanswm màs y dŵr, y botel a'r bêl tua 1.5 kg (h.y.  $m_0 = 1.5$  kg). O hyn, mae 1.0 kg yn ddŵr, mae'r bêl yn 0.45 kg a màs y botel yw 0.05 kg. Drwy ddadansoddi fideo cyflym o'r roced, mae'r cyfan o'r 1.0 kg o ddŵr yn cael ei fwrw allan mewn 0.14 s felly gallwn ni gyfrifo cyfradd gymedrig lleihad ym màs y roced: 12

$$\frac{\Delta m}{\Delta t} = k = \frac{1.0}{0.14} = 7.1 \text{ kg s}^{-1}$$

Gallwn ni hefyd ddefnyddio'r ffigurau hyn i ddarganfod buanedd gwacáu'r dŵr pan rydym ni'n gwybod bod radiws gwddf y botel yn 1.1 cm.



Diagram 3

Màs y dŵr ( $\Delta m$ ) yn y silindr sydd â hyd  $u \times \Delta t$  yw:

$$\text{cyfaint} \times \text{dwysedd} = \pi r^2 \times u \times \Delta t \times \rho$$

sy'n rhoi perthynas rhwng cyfradd colli màs a'r cyflymder gwacáu:

$$\frac{\Delta m}{\Delta t} = \pi r^2 \rho u \quad \textbf{Hafaliad 4}$$

13

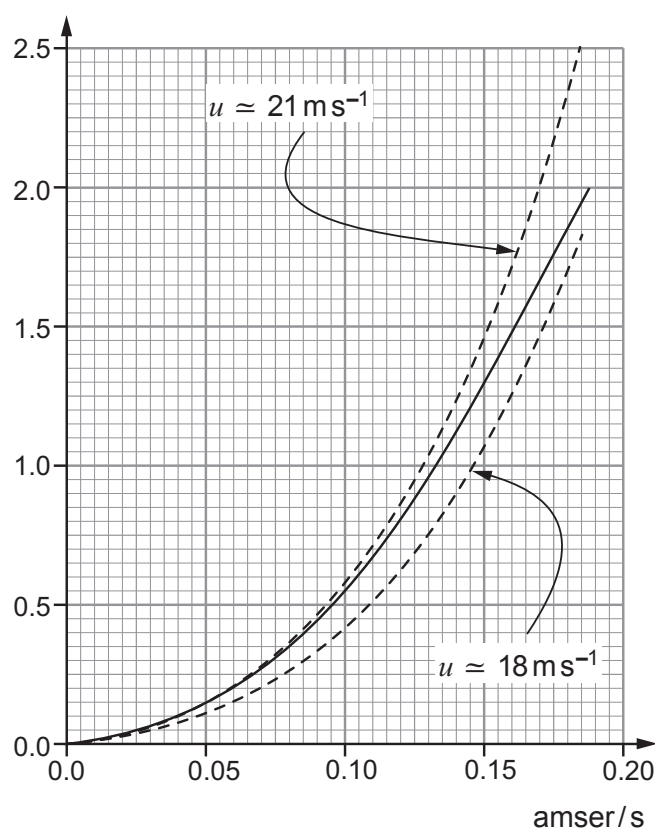
Pan gaiff y mynegiad hwn ei hafalu â chyfradd wirioneddol colli màs ( $7.1 \text{ kg s}^{-1}$ ), mae'n rhoi gwerth  $u$  o tua  $19 \text{ m s}^{-1}$  (gan gofio bod dwysedd dŵr, yn ddigon cyfleus, yn  $1000 \text{ kg m}^{-3}$ ).

### Cymhariaeth Rhwng y Ddamcaniaeth Roced Ddelfrydol a'r Arbrawf

Mae hyn yn ddigon o wybodaeth i'w rhoi yn yr hafaliadau rocet (2 a 3) a'u cymharu â mudiant rocet go iawn. Y ffordd fwyaf hawdd o wneud hyn yw defnyddio taenlen – gallwn ni roi'r hafaliadau rocet a'r data gwirioneddol ynddi a chymharu'r ddau. Yn y graff sydd i'w weld (diagram 4), mae data gwirioneddol y rocet 2 litr wedi'u dangos fel llinell ddi-dor. Mae'r hafaliad rocet damcaniaethol yn cael ei gynrychioli gan y llinellau toredig. Cafodd data uchder y rocet wirioneddol eu casglu drwy ddefnyddio camera digidol eithaf rhad wedi'i osod ar 220 ffrâm yr eiliad. Yna, cafodd fideo o fudiant y rocet ei ddadansoddi fesul ffrâm gan ddefnyddio riwl 30 cm i fesur pellteroedd ar y sgrin a llunio'r gromlin ddi-dor yn y graff.

Yn ddiddorol, pan gafodd y data hyn a'r hafaliadau rocet eu rhoi mewn taenlen, nid oedd gwerth y buanedd gwacáu ( $u$ ) o  $19 \text{ m s}^{-1}$  yn cynhyrchu ffit ddelfrydol (gweler diagram 4). Y ffit orau i fudiant cynnar y rocet oedd buanedd gwacáu o tua  $21 \text{ m s}^{-1}$ , ac roedd mudiant diweddarach y rocet yn ffitio'n well â buanedd gwacáu o tua  $18 \text{ m s}^{-1}$ . Efallai fod hyn yn ymddangos fel pe na bai'r ffigurau'n cytuno ond, ar y llaw arall, efallai fod yr anghysondebau hyn yn dangos y rheswm dros yr anghytundeb.

uchder / m



14

15

Diagram 4

### Damcaniaeth Roced gyda Gwasgedd a Buanedd Gwacáu'n Lleihau

Mae'r hafaliad roced yn ffitio'n dda am 0.10s gyntaf ei hediad gyda buanedd gwacáu o tua  $21\text{ m s}^{-1}$ . Ond yna dydy'r roced go iawn ddim yn dal i fyny â'r roced ddamcaniaethol ac mae'n ymddangos bod y roced go iawn yn ffitio'n well â buanedd gwacáu o tua  $18\text{ m s}^{-1}$ . Pa reswm allai fod dros hyn? Yn syml, y lleihad yng ngwasgedd yr aer yn y botel wrth i'r dŵr adael. Ond sut gallwn ni fodelu'r gwasgedd yn y botel? I'w nodi'n syml iawn, gallwn ni ddefnyddio deddf Boyle. Yng nghanol yr 1600au, dywedodd Robert Boyle fod y canlynol yn wir am fâs penodol o nwy ar dymheredd cyson:

$$\text{gwasgedd} \times \text{cyfaint} = \text{cysonyn}$$

Rydym ni'n gwybod bod cyfaint cychwynnol y nwy tua 1 litr (yn y botel 2 litr). Yn eithaf amlwg, bydd cyfaint terfynol y nwy yn 2 litr. Felly, mae deddf Boyle yn dweud wrthon ni y bydd y gwasgedd ar y dechrau tua dwbl y gwasgedd terfynol. Rhwng y ddau gam hyn, bydd pob gram o ddŵr sy'n cael ei fwrw allan yn darparu  $1\text{ cm}^3$  ychwanegol o aer yn y botel, a gallwn ni gyfrifo'r gostyngiad cyfatebol mewn gwasgedd yn rhwydd gan ddefnyddio deddf Boyle.

Nawr bod gennym ni'r manylion i fodelu'r gostyngiad yn y gwasgedd yn y botel, gallwn ni gyfrifo buanedd y dŵr sy'n dod allan o'r botel. Y cyfan sydd angen i ni ei wneud yw defnyddio hafaliad Bernoulli.

$$p_{\text{atm}} = p - \frac{1}{2}\rho u^2 \quad \textbf{Hafaliad 5}$$

Er syndod, mae hyn yn golygu bod buanedd gadael y dŵr yn annibynnol ar faint agoriad y botel!

$$u = \sqrt{\frac{2(p - p_{\text{atm}})}{\rho}} \quad \textbf{Hafaliad 6}$$

Nawr, gallwn ni ddefnyddio'r hafaliad hwn i gyfrifo buanedd gwacáu'r dŵr. Mae dwysedd dŵr ( $\rho$ ) yn  $1000\text{ kg m}^{-3}$  ac roedd y  $(p - p_{\text{atm}})$  cychwynnol yn  $3.4 \times 10^5$ . Mae hyn yn rhoi buanedd gwacáu cychwynnol o tua  $26\text{ m s}^{-1}$ .

I gwblhau ein model, dylem ni gynnwys disgyrchiant a gwrthiant aer hefyd. Mae disgyrchiant yn ddigon hawdd ond beth am wrthiant aer? Un ddamcaniaeth syml ar gyfer gwrthiant aer yw bod y cynnydd mewn gwrthiant aer mewn cyfrannedd â chyflymder wedi'i sgwario. Mewn gwirionedd, os chwiliwn ni am wrthiant aer sffêr, dylem ni ddarganfod:

$$F_{\text{llusg}} = 0.47 \times \frac{1}{2}\rho_{\text{aer}} v^2 \times A \quad \textbf{Hafaliad 7}$$

Ile  $A$  yw arwynebedd trawstoriadol mwyaf y sffêr,  $\rho_{\text{aer}}$  yw dwysedd aer a  $v$  yw buanedd y sffêr.

Mantais fawr arall wrth osod pêl-droed ar ben y roced potel ddŵr yw ein bod ni'n gallu modelu'r gwrthiant aer yn seiliedig ar ddimensiynau'r bêl-droed. Mae hyn yn tybio nad yw'r botel o dan y bêl-droed yn effeithio ar y gwrthiant aer, ond dylai hynny fod yn frasamcan rhesymol o ystyried bod arwynebedd trawstoriadol y bêl-droed yn llawer mwy nag un y botel. Mae dwysedd aer ( $\rho_{\text{aer}}$ ) yn  $1.20\text{ kg m}^{-3}$  ac mae diamedr y bêl-droed yn  $22.0\text{ cm}$ , a gallwn ni fewnosod y ddau werth hyn yn yr hafaliad gwrthiant aer.

Dylai'r holl wybodaeth hon roi'r grym cydeffaith terfynol canlynol sy'n gweithredu ar y roced:

$$F_{\text{cyd}} = \pi r^2 \rho u^2 - mg - 0.0107v^2$$

**Hafaliad 8**

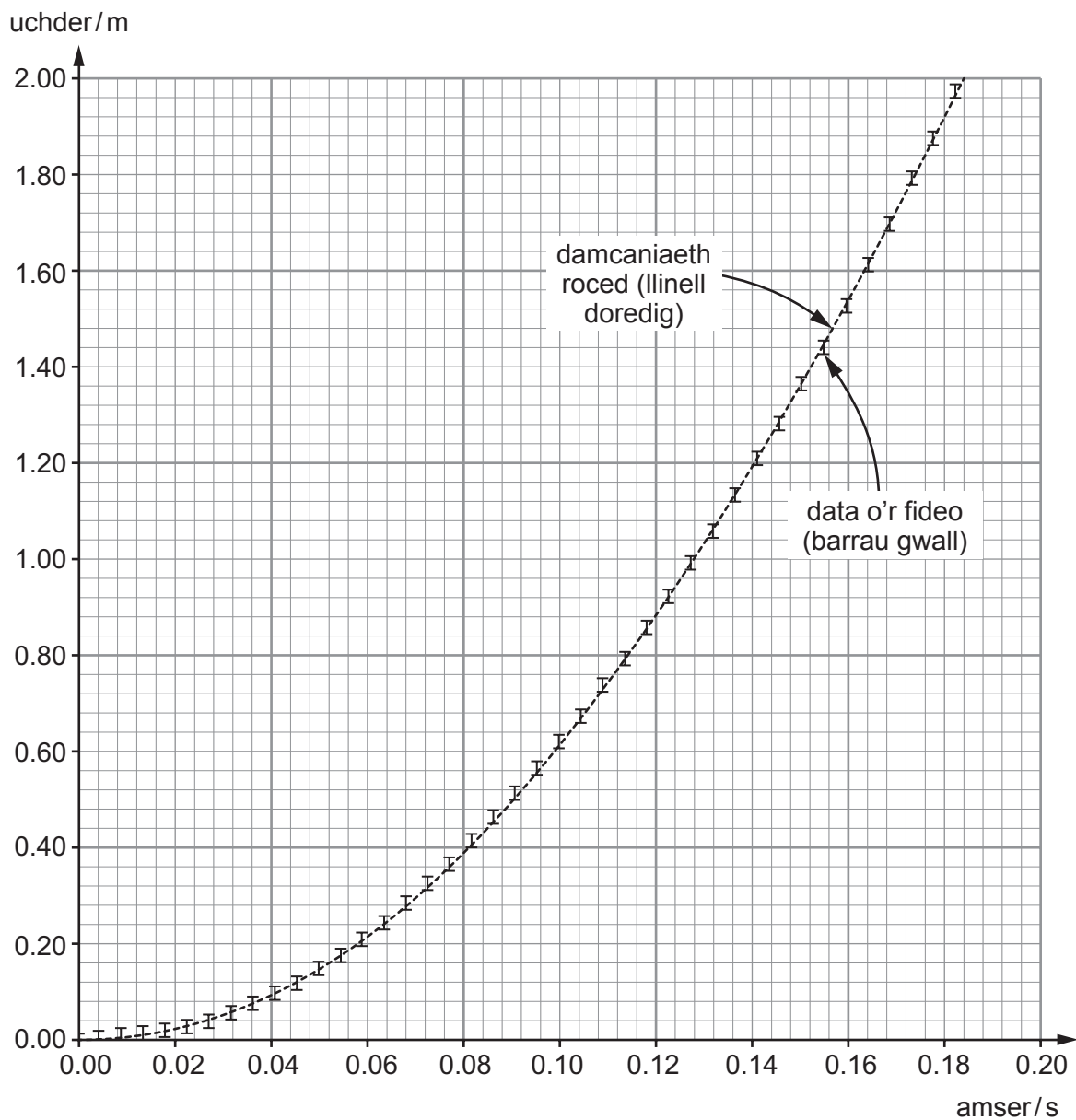
Ile:  $u$  = buanedd gwacáu enydaidd y dŵr  
 $r$  = radiws agoriad y botel  
 $\rho$  = dwysedd dŵr ( $1000 \text{ kg m}^{-3}$ )  
 $m$  = màs enydaidd y roced (gan gynnwys y dŵr a'r bêl-droed)  
 $v$  = buanedd enydaidd y roced

22

### Cymhariaeth Derfynol rhwng y Ddamcaniaeth a'r Arbrawf

Ar ôl rhoi'r data hyn i gyd mewn taenlen gydag amser yn cynyddu mewn camau o  $1/220$  o eiliad (i gyd-fynd â'r camera digidol), a holl ddata'r roced wedi'u cyfrifo ar gyfer pob cyfwng amser, dyma'r canlyniad terfynol.

23



**Diagram 5**

Yma, mae'r ddamcaniaeth roced (llinell doredig) yn cytuno'n rhagorol â chanlyniadau'r arbrawf (barrau gwall). Dydy data'r model wedi'u cyfrifo ddim y tu allan i'r barrau gwall sy'n cyfateb i fudiant gwirioneddol y roced ar unrhyw adeg (mae'r barrau gwall hyn yn cyfateb i ddarlleniad  $\pm 0.5\text{mm}$  o'r riwl wrth sgrin y cyfrifiadur). Y paramedrau ffit orau terfynol gafodd eu defnyddio oedd  $m_0 = 1.52\text{ kg}$ , gwasgedd cychwynnol  $= 4.7 \times 10^5\text{ Pa}$  a radiws agoriad y botel  $= 1.019\text{ cm}$ . 24

I gloi, rydym ni wedi dadansoddi mudiant roced potel ddŵr blastig gan ddefnyddio dim ond Ffiseg Safon Uwch ac ychwanegu hafaliad Bernoulli a damcaniaeth llusgo. Er bod y fathemateg yn gallu bod yn gymhleth, mae'n gymharol hawdd datrys hyn drwy ddefnyddio dulliau rhifiadol mewn taenlen ar gyfrifiadur. Mae'r canlyniadau'n syfrdanol o fanwl gywir ac roedd y syniad newydd o osod pêl-droed ar ben y roced yn gymorth mawr i hynny. 25